

IS3 : Correction ds 1

Exercice 1

a) ▶ On donne $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$. L'ensemble de définition est $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x}-1 \neq 0\}$

On a $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ d'où $D_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[$.

▶ D_f n'est pas centré en 0 : la fonction n'est ni paire ni impaire.

b) ▶ On donne $g(x) = \frac{x}{x^3-2x}$. L'ensemble de définition est $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } x^3-2x \neq 0\}$

or $x^3-2x = x(x^2-2) = x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ on en déduit $D_g = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

▶ D_g est centré en 0 ; pour tout $x \in D_g$, $g(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^3-2(-x)} = \frac{-x}{-x^3+2x} = \frac{x}{x^3-2x} = g(x)$ donc la fonction g est paire

Exercice 2

1. a) ▶ L'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}^*$.

▶ L'ensemble de définition de la fonction g est $D_g = \mathbb{R}^*$.

▶ L'ensemble de définition de la fonction h est $D_h = \mathbb{R}$.

▶ Cherchons l'ensemble de définition de la fonction m

$$\begin{cases} x \in D_f \\ x \in D_g \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}^* \\ 2 + \frac{1}{x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}^* \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ donc } D_m = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$$

b) On pose $u(x) = 4x$ et $v(x) = -\frac{1}{x}$.

c) u est une fonction affine croissante sur $] -\infty; 0[$ ($a = 4 > 0$)

et v est une fonction croissante sur $] -\infty; 0[$ (produit de la fonction inverse décroissante sur $] -\infty; 0[$ et d'un réel négatif -1)

donc f est une fonction croissante sur $] -\infty; 0[$ (somme de deux fonctions croissantes sur $] -\infty; 0[$)

$$2. \text{ a) Pour tout } x \in D_m, m(x) = \frac{4x - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{4x^2 - 1}{x}}{\frac{2x+1}{x}} = \frac{4x^2 - 1}{x} \times \frac{x}{2x+1} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x+1} = 2x-1$$

b) On a $D_h \neq D_m$ donc les fonctions h et m ne sont pas égales.

c) La courbe représentative de la fonction m est la droite d'équation $y = 2x - 1$ privée des points d'abscisses $-\frac{1}{2}$ et 0.

Exercice 3

1. On a : $x \mapsto x-3 \mapsto \frac{1}{x-3}$; on pose $f_1(x) = x-3$ et $f_2(x) = \frac{1}{x}$ on en déduit $f = f_2 \circ f_1$

f_1 est croissante sur $] -\infty; 3[$ avec $f_1(x) \in] -\infty; 0[$ et f_2 est décroissante sur $] -\infty; 0[$ d'où **f est décroissante sur $] -\infty; 3[$**

f_1 est croissante sur $] 3; +\infty[$ avec $f_1(x) \in] 0; +\infty[$ et f_2 est décroissante sur $] 0; +\infty[$ d'où **f est décroissante sur $] 3; +\infty[$**

2. On a : $x \mapsto x^2 \mapsto x^2 - 1$; on pose $g_1(x) = x^2$ et $g_2(x) = x - 1$ on en déduit $g = g_2 \circ g_1$

g_1 est croissante sur $] 0; +\infty[$ avec $g_1(x) \in] 0; +\infty[$ et g_2 est croissante sur $] 0; +\infty[$ d'où **g est croissante sur $] 0; +\infty[$**

3. a) On a $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ \frac{1}{x-3} \in \mathbb{R} \end{cases}$ donc $D = \mathbb{R} - \{3\}$

b) Pour $x \in D$, $g \circ f(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{1}{x-3}\right) = \left(\frac{1}{x-3}\right)^2 - 1 = \frac{1 - (x-3)^2}{(x-3)^2} = \frac{-x^2 + 6x - 8}{(x-3)^2}$

c) On a f est décroissante sur $] 3; +\infty[$ avec $f(x) \in] 0; +\infty[$ et g est croissante sur $] 0; +\infty[$
donc **la fonction $g \circ f$ est décroissante sur $] 3; +\infty[$**

Exercice 4

$$a) (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \pi \quad [2 \pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6} + \pi \quad [2 \pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{5\pi}{6} \quad [2 \pi] \quad \text{or } \frac{5\pi}{6} \in]-\pi, \pi], \text{ la mesure principale est } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{5\pi}{6}$$

$$b) (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \pi \quad [2 \pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + \pi \quad [2 \pi] \quad (\text{ABC triangle rectangle direct})$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{3\pi}{2} \quad [2 \pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \quad [2 \pi] \quad \text{or } -\frac{\pi}{2} \in]-\pi, \pi], \text{ la mesure principale est } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$c) (\overrightarrow{AH}, 2\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{HB}) \quad [2 \pi] \quad \text{les vecteurs } \overrightarrow{HB} \text{ et } 2\overrightarrow{CB} \text{ étant colinéaires de même sens}$$

$$(\overrightarrow{AH}, 2\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + \pi \quad [2 \pi]$$

$$(\overrightarrow{AH}, 2\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} + \pi \quad [2 \pi]$$

$$(\overrightarrow{AH}, 2\overrightarrow{CB}) = \frac{3\pi}{2} \quad [2 \pi]$$

$$(\overrightarrow{AH}, 2\overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \quad [2 \pi] \quad \text{or } -\frac{\pi}{2} \in]-\pi, \pi], \text{ la mesure principale est } (\overrightarrow{AH}, 2\overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$d) (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}) + \pi \quad [2 \pi]$$

$$\text{or } (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BH}) = \pi \quad [2 \pi] \quad \text{on en déduit } (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}) = \frac{5\pi}{3} \quad [2 \pi]$$

$$\text{d'où } (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = \frac{8\pi}{3} \quad [2 \pi]$$

$$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \quad [2 \pi] \quad \text{or } \frac{2\pi}{3} \in]-\pi, \pi], \text{ la mesure principale est } (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = \frac{2\pi}{3}$$

Exercice 5

$$1. \text{ On a : } \frac{19\pi}{12} = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi \quad \text{avec } -\frac{5\pi}{12} \in]-\pi, \pi] \quad \text{donc la mesure principale de } (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{5\pi}{12}.$$

2. On utilise la relation de Chasles :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \quad [2 \pi]$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{5\pi}{12} - \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \quad [2 \pi]$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = -\pi \quad [2 \pi]$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \pi - 2\pi \quad [2 \pi] \quad \text{avec } \pi \in]-\pi, \pi] \quad \text{donc la mesure principale est } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \pi$$

on en déduit : les vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AE} sont colinéaires de sens contraires

donc les points A, C et E sont alignés et $A \in [CE]$.