

IS3 : Correction ds 02

Exercice 1 On note $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

- Réponse d) $-\vec{j}$ on a $h_1(x) = x^2 - 1 = f(x) - 1$
- Réponse a) \vec{i} on a $h_2(x) = (x-1)^2 = f(x-1)$
- Réponse c) $-2\vec{i}$ on a $h_3(x) = \frac{1}{x+2} = g(x+2)$
- Réponse a) $2\vec{i} + 3\vec{j}$ on a $h_4(x) = g(x-2) + 3$
- Réponse b) $2\vec{j}$ on a $h_5(x) = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x} = g(x) + 2$
- Réponse a) d'axe $(O; \vec{i})$ on a $h_6(x) = 1 - x^2 = -h_1(x)$

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $] -\infty; -9[\cup] -9; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+17}{x+9}$

1. Pour tout réel $x \neq -9$, $2 - \frac{1}{x+9} = \frac{2x+18-1}{x+9} = \frac{2x+17}{x+9} = f(x)$

2. a) On a $x \mapsto x+9 \mapsto \frac{1}{x+9} \mapsto 2 - \frac{1}{x+9}$

On pose $g : x \mapsto x+9$; $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $j : x \mapsto 2-x$ on a $f = j \circ h \circ g$

- b) \blacktriangleright g est croissante sur $] -\infty; -9[$ avec $g(x) \in] -\infty; 0[$;
 h est décroissante sur $] -\infty; 0[$ avec $h(x) \in] -\infty; 0[$;
 j est décroissante sur $] -\infty; 0[$ donc **f est croissante sur $] -\infty; -9[$**
 \blacktriangleright g est croissante sur $] -9; +\infty[$ avec $g(x) \in] 0; +\infty[$;
 h est décroissante sur $] 0; +\infty[$ avec $h(x) \in] 0; +\infty[$;
 j est décroissante sur $] 0; +\infty[$ donc **f est croissante sur $] -9; +\infty[$**

3. Pour tout réel h tel que $-9+h \in \mathbb{R} - \{-9\}$, on a $h \neq 0$ d'où $-9-h \in \mathbb{R} - \{-9\}$

et $\frac{f(-9+h) + f(-9-h)}{2} = \frac{2 - \frac{1}{-9+h+9} + 2 - \frac{1}{-9-h+9}}{2} = \frac{4 - \frac{1}{h} + \frac{1}{h}}{2} = 2$

donc le point $I(-9; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe \mathcal{C} représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 3

1. On a

$$A = \sin(3\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(3\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(\pi - x) - \sin x + \cos(\pi - x) + \cos x = \sin x - \sin x - \cos x + \cos x = 0$$

$$B = \sin(-x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x - \sin x + \cos x + \cos x = 2 \cos x - 2 \sin x$$

$$C = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(5\pi - x) - \cos(3\pi + x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi - x) - \cos(\pi + x)$$

$$C = \sin x - \cos x - \sin x + \cos x = 0$$

2.a) On note k et k' deux entiers relatifs.

$$\cos(2x) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + k'\pi$$

si $k = -1$: $x = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6} \in] -\pi; \pi]$ et si $k = 0$: $x = \frac{\pi}{6} \in] -\pi; \pi]$

si $k' = 0$: $x = -\frac{\pi}{6} \in] -\pi; \pi]$ et si $k' = 1$: $x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \in] -\pi; \pi]$ donc $S = \left\{ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

b) On note k et k' deux entiers relatifs.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(2x) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2x + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{4} = \pi - 2x + 2k'\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k'\pi}{3}$$

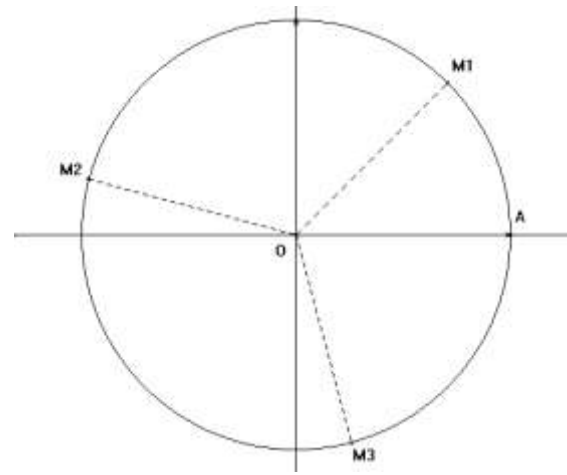
Les solutions dans \mathbb{R} sont les réels $\frac{\pi}{4} - 2k\pi$ et $\frac{\pi}{4} + \frac{2k'\pi}{3}$ où k et k' deux entiers relatifs.

si $k = 0$ on a $x = \frac{\pi}{4} \in]-\pi ; \pi]$ représenté par M_1

si $k' = 0$ on a $x = \frac{\pi}{4} \in]-\pi ; \pi]$ représenté par M_1

si $k' = 1$ on a $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12} \in]-\pi ; \pi]$ représenté par M_2

si $k' = -1$ on a $x = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{12} \in]-\pi ; \pi]$ représenté par M_3



Exercice 4

1. On a $\pi - \frac{\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}$; $\pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$

2. On a $A = \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{9\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \left(\pi - \frac{2\pi}{5} \right) + \cos \left(\pi - \frac{\pi}{10} \right) = \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{10} = 0$

et

$$B = \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{10} + \cos \frac{11\pi}{10} + \sin \frac{7\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} + \sin \frac{19\pi}{10}$$

$$B = \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{10} + \cos \left(\pi + \frac{\pi}{10} \right) + \sin \left(\pi + \frac{2\pi}{5} \right) + \cos \left(\pi + \frac{3\pi}{5} \right) + \sin \left(\pi + \frac{9\pi}{10} \right)$$

$$B = \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{10} - \sin \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{9\pi}{10} = 0$$

Exercice 5

1. a) \blacktriangleright ABC triangle direct, isocèle et rectangle en A d'où $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$

\blacktriangleright AIC et BJA deux triangles équilatéraux indirects

d'où $(\overrightarrow{AJ} ; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{3}$

b) On a $(\overrightarrow{AJ} ; \overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{AJ} ; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$

2. a) On a $AJ = AB = AC = AI$ et $(\overrightarrow{AJ} ; \overrightarrow{AI}) = \frac{7\pi}{6}$ donc AJI est un triangle

isocèle

b) On en déduit $(\overrightarrow{AJ} ; \overrightarrow{AI}) + 2(\overrightarrow{JI} ; \overrightarrow{JA}) = \pi$ [2 π]

donc $(\overrightarrow{JI} ; \overrightarrow{JA}) = -\frac{\pi}{12}$

3. \blacktriangleright BJA triangle équilatéral indirect d'où $(\overrightarrow{JA} ; \overrightarrow{JB}) = -\frac{\pi}{3}$

\blacktriangleright $(\overrightarrow{JB} ; \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BJ} ; \overrightarrow{BA}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$ car BJA triangle équilatéral indirect

\blacktriangleright ABC triangle direct, isocèle et rectangle en A d'où $(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{4}$

4. On en déduit $(\overrightarrow{JI} ; \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{JI} ; \overrightarrow{JA}) + (\overrightarrow{JA} ; \overrightarrow{JB}) + (\overrightarrow{JB} ; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = 0$

5. Les vecteurs \overrightarrow{JI} et \overrightarrow{BC} sont colinéaires de même sens donc les droites (JI) et (BC) sont parallèles

