1S2 : Correction ds 1

Exercice 1

1. a) On a $f(1) = -\frac{3}{2} \neq 1$ d'où $\mathbf{M \notin C_f}$; b) On a $f(4) = 6$ d'où $\mathbf{M \in C_f}$; c) 3 est la valeur interdite d'où $\mathbf{M \notin C_f}$

2. On a : $P \in C_f \Leftrightarrow f(a) = 2 \Leftrightarrow \frac{a+2}{a-3} = 2 \Leftrightarrow a + 2 = 2a - 6 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 8}$

Exercice 2

a) On a $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geqslant 0\} = [0;+\infty[$. On pose $u(x) = 2\sqrt{x}$ et $v(x) = \frac{1}{3}x^2$, on a $f = u + v$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0;+\infty[$ et $2 > 0$ d'où u est croissante sur $[0;+\infty[$

de même, la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0;+\infty[$ et $\frac{1}{3} > 0$ d'où v est croissante sur $[0;+\infty[$

On a : f somme de deux fonctions croissantes sur $[0;+\infty[$ d'où f est croissante sur $[0;+\infty[$

b) On pose $u(x) = \frac{1}{5x}$ et $v(x) = -\frac{1}{5}x$, on a $g = u + v$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et $\frac{1}{5} > 0$ d'où u est décroissante sur $]0;+\infty[$

La fonction v est décroissante sur $]0;+\infty[$ car $-\frac{1}{5} < 0$

On a : g somme de deux fonctions décroissantes sur $]0;+\infty[$ d'où g est décroissante sur $]0;+\infty[$

Exercice 3

1. On a $\boldsymbol{D_f = \mathbb{R} - \{-1\}}$ et $\boldsymbol{D_g = \mathbb{R}}$

$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$, on a $\begin{cases} x \in \mathbb{R} - \{-1\} \\ f(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ donc $\boldsymbol{D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \{-1\}}$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$, on a : $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ g(x) \in \mathbb{R} - \{-1\} \end{cases} \Leftrightarrow 3x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{3}$ donc $D_{f\circ g} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

2) Pour $x \in D_{g\circ f}$, $g \circ f(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = 3 \times \frac{1}{x+1} = \frac{3}{x+1}$; Pour $x \in D_{f\circ g}$, $f \circ g(x) = f[g(x)] = f(3x) = \frac{1}{3x+1}$

Exercice 4

1) On a : $\boldsymbol{D_f = \mathbb{R} - \{-1\} = D_g}$

pour $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $f(x) = \frac{(x-1)(x^2+3x+3)}{(x+1)^2} = \frac{x^3+2x^2-3}{(x+1)^2}$ et

$g(x) = x - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1)^2-(x+1)-2}{(x+1)^2} = \frac{x^3+2x^2+x-x-1-2}{(x+1)^2} = \frac{x^3+2x^2-3}{(x+1)^2} = f(x)$ d'où $f = g$

2) $f(x) = \sqrt{x^2-4} = \sqrt{(x-2)(x+2)}$

On a :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 4 \geqslant 0\} =]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$ et $D_g = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x - 2 \geqslant 0 \text{ et } x + 2 \geqslant 0\} = [2;+\infty[$

$D_f \neq D_g$ donc $f \neq g$

Exercice 5

u est une fonction définie et croissante sur un intervalle I

a et b deux éléments quelconques de I tels que $a < b$: $u(a) \leqslant u(b) \Leftrightarrow u(a) - 3 \leqslant u(b) - 3 \Leftrightarrow (u-3)(a) \leqslant (u-3)(b)$

donc (u —3) est une fonction croissante sur I

Exercice 6

1. a) $\alpha = \frac{7\pi}{2} = \frac{-\pi+8\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}+4\pi$ avec $-\frac{\pi}{2} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$ d'où $-\frac{\pi}{2}$ est la mesure principale de αb)

$\alpha = -\frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi-6\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}-2\pi$ avec $\frac{2\pi}{3} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$ d'où $\frac{2\pi}{3}$ est la mesure principale de α

c) $\alpha = \frac{35\pi}{6} = \frac{-\pi+36\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}+6\pi$ avec $-\frac{\pi}{6} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$ d'où $-\frac{\pi}{6}$ est la mesure principale de α

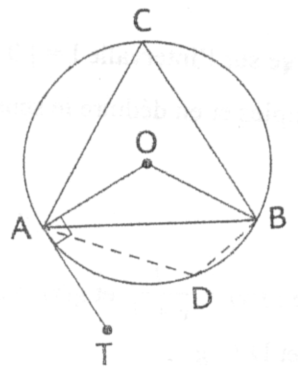
d) $\alpha = -\frac{21\pi}{4} = \frac{3\pi-24\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}-6\pi$ avec $\frac{3\pi}{4} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$ d'où $\frac{3\pi}{4}$ est la mesure principale de α

e) $\alpha = \frac{201\pi}{3} = 67\pi = \pi+66\pi$ avec $\pi \in \left]-\pi\,;\pi\right]$ d'où π est la mesure principale de α

f) $\alpha = -\frac{5\pi}{6} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$ d'où $-\frac{5\pi}{6}$ est la mesure principale de α

2. a) $x = -\frac{5\pi}{4}$ et $y = \frac{15\pi}{4}$; on a $x-y = -\frac{5\pi}{4}-\frac{15\pi}{4} = -5\pi$ donc x et y ne sont pas deux mesures du même angle orienté

b) $x = 2$ et $y = 2(1+7\pi)$; on a $x-y = 2-2(1+7\pi) = -14\pi$ donc x et y sont deux mesures du même angle orienté



3. a) ABC est un triangle équilatéral direct d'où $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$

et (AT) est la tangente au cercle en A d'où $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{2}$

b) ➢ On rappelle qu'un angle inscrit sur le cercle a pour mesure la moitié de la mesure de l'angle au centre correspondant

d'où $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\,(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{2\pi}{3}$

avec $\frac{2\pi}{3} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$ donc la mesure principale est $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3}$

➢ $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\times -\frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

avec $-\frac{2\pi}{3} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$ donc la mesure principale est $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = -\frac{2\pi}{3}$

➢ La somme des angles géométriques du triangle isocèle OAB est égale à π

d'où $\widehat{OAB} = \frac{\pi-\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, on en déduit $\widehat{TAB} = \widehat{TAO} - \widehat{OAB} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

on en déduit $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$ avec $\frac{\pi}{3} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$ donc la mesure principale est $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$